# Часть III ДРУГИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Во всех предшествующих случаях мы рассматривали непрерывные детерминированные системы, описываемые дифференциальными уравнениями. Однако во многих случаях математические модели могут быть описаны и другими средствами. В частности, в Главе 16 в качестве математических моделей выступают различные задачи на экстремум, в Главе 17 приводятся дискретные системы, а в Главе 18 – стохастические системы.

# 16. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ

*Поскольку наш мир устроен наисовершеннейшем образом и является творением всеведущего Творца*, *во всем мире не происходит ничего такого*, *в чем не было бы воплощено какое-либо правило максимума или минимума.*

Леонард ЭЙЛЕР

До сих пор математическими моделями исследуемых процессов неизменно были дифференциальные уравнения. В данной лекции законы эволюции выводятся из некоторых задач на экстремум, которые сами можно считать математическими моделями рассматриваемых систем. Это относится, например, к задаче о брахистохроне, в которой требуется определить кривую в вертикальной плоскости, двигаясь вдоль которой тело попадет из одной заданной точки в другую за минимальное время, см. Раздел 1. Она является частным случаем задачи Лагранжа, относящейся к ***вариационному исчислению***[[1]](#endnote-1). Задача Лагранжа может быть сведена к некоторому дифференциальному уравнению, называемому уравнением Эйлера, см. Раздел 2. Чрезвычайно простым приложением этой методики является задача нахождения кривой наименьшей длины, см. Раздел 3. Характерно, что уравнение движения для рассмотренного в Главе 1 процесса падении тела оказывается уравнением Эйлера для задачи минимизации некоторого интеграла, называемого действием, см. Раздел 4. В общем случае минимизация действия системы представляется собой принцип наименьшего действия, являющийся одним из наиболее глубоких законов физики[[2]](#endnote-2), см. Раздел 5. В качестве приложения в Разделе 6 рассматривается процесс колебания струны, описанный в Главе 12.

В Приложении устанавливается связь вариационных принципов с законами сохранения, а также рассматривается физические процессы, для описания которых применяются другие задачи вариационного исчисления. Кроме того, приводятся некоторые методы приближенного решения задач нахождения экстремума.

### **ЛЕКЦИЯ**

#### **1. Задача о брахистохроне**

Пусть заданы точки *A* и *B* в вертикальной плоскости, не лежащие на одной прямой, перпендикулярной поверхности земли. Необходимо найти линию, соединяющую эти точки, такую, двигаясь вдоль которой под действием исключительно собственного веса, тело попадет из одной точки в другую за минимальное время. Данная задача называется ***задачей о брахистохроне***[[3]](#endnote-3).

Сформулируем математическую модель рассматриваемого процесса. Поместим точку *A* в начало координат. Координату *y* направим вертикально вниз, а координату *x* – горизонтально, см. Рис. 16.1). Обозначим через (*X*,*Y*) координаты точки *В*. Тогда задача состоит в отыскании такой функции *y* = *y*(*x*), которая удовлетворяет условиям

*y*(0) = 0, *y*(*X*) = *Y* (16.1)

и соответствует минимальному времени на преодоления пути от точки *A* к точке *B*.



Рис. 16.1. Движение тела в задаче о брахистохроне.

Установим скорость падающего тела в точке с координатой *y*. Учитывая равенства** находим производную



Таким образом, справедливо соотношение *vdv* = *gdy*. Интегрируя полученное выражение, установим равенство *v*2/2 = *gy* + *c*, где *c* – произвольная постоянная. Учитывая, что при *y*=0, т.е. в точке *A* тела покоится, заключаем, что константа *c* равна нулю. Тогда скорость падающего тела с вертикальной координатой *y* определяется по формуле 

Если исключить влияние силы сопротивления, то как свободное падение тела, так и его скатывание по некоторой дуге *y* = *y*(*x*), определяется исключительно действием силы тяготения. Тогда скорость тела на фиксированной высоте в обоих случаях будет одинаковой и равной *v*. Обозначим через *s* длину дуги данной кривой от точки *M*, в которой тело находится в момент времени *t* до начала координат, т.е. точки *A*. Тогда скорость движущегося тела равна

 (16.2)

Путь, пройденный телом, а значит, и время, затраченное на его преодоление, существенным образом зависят от искомой функции *y* = *y*(*x*). Предположим, что тело, находящееся в момент времени *t* в точке *M* с координатами (*x*,*y*), двигаясь по рассматриваемой кривой за достаточно малый интервал времени Δ*t* переместится в точку *M*' с координатами (*x*+Δ*x*,*y*+Δ*y*), см. Рис. 16.2.



Рис. 16.2. Вычисление длины дуги.

При достаточной малости величины Δ*t* длина дуги, соединяющей точки *M* и *M* ', будет сколь угодно близка к длине отрезка *MM* ', равной



При стремлении к нулю длины интервала времени Δ*t* точка *M*' стремится к *M*, и мы получаем следующее выражение для элемента дуги

 (16.3)

где *y*' = *dy*/*dx*.

В результате соотношение (16.2) может быть записано в виде

** (16.4)

Полученное выражение связывает горизонтальную координату движущегося тела *x* со временем *t*. Отметим, что при *t* = 0, т.е. в начальный момент времени тело, находясь в точке *A* имеет координату *x*=0. В конечный момент времени *T* оно попадает в точку *B* с горизонтальной координатой *X*, см. Рис. 16.1. Тогда в результате интегрировании равенства (16.4) установим соотношение[[4]](#endnote-4)



Итак, если задана кривая *y* = *y*(*x*), удовлетворяющая условиям (16.1), то, двигаясь вдоль нее под действием собственного веса, тело пройдет путь от точки *A* до точки *B* за время



Тем самым математическая постановка задачи о брахистохроне сводится к минимизации интеграла *Т* на множестве функций *y*, удовлетворяющих условию (16.1). В вариационном исчислении задача такого типа называется ***задачей Лагранжа***. Отметим, что что зависимость *T=T*(*y*) называется ***функционалом***, поскольку ставит в соответствие функции (а не числу) *y* значение интеграла *T*(*y*), т.е. число.

Отметим, что в качестве математической модели рассматриваемого физического явления у нас появляется не уравнение того или иного вида, а задача нахождения экстремума функционала[[5]](#endnote-5).

***Математической моделью в задаче о брахистохроне служит задача минимизации интегрального функционала на множестве функций,   
принимающих известные значения на концах данного интервала.***

***Задача о брахистохроне является частным случаем задачи Лагранжа.***

#### **2. Задача****Лагранжа**

В предшествующем разделе мы установили, что в качестве математической модели рассматриваемого процесса выступает задача минимизации некоторого интегрального функционала, относящаяся к числу задач Лагранжа. Для анализа таких задач требуются некоторые сведения из ***теории экстремума***.

Простейшая задача на экстремум состоит в минимизации некоторой функции *f = f*(*x*). Как известно, если в некоторой точке *x* достигается минимум функции *f*,то производная данной функции в этой точке обращается в нуль[[6]](#endnote-6), т.е. справедливо равенство *f'*(*x*)=0. Последнее соотношение, называемое ***условием стационарности***, представляется собой алгебраическое уравнение относительно искомой точки минимума[[7]](#endnote-7).

Рассмотрим задачу отыскания такой функции *x=x*(*t*) на некотором отрезке [*t*1,*t*2], которая минимизирует функционал



и удовлетворяет граничным условиям

*x*(*t*1) = *x*1, *x*(*t*2) = *x*2, (16.5)

где *L* – известная функция своих аргументов, а *x*1 и *x*2 – известные числа. Данная задача называется ***задачей Лагранжа***.

Анализ задачи Лагранжа осуществляется следующим образом. Предположим, что функция *x* является ее решением. Тогда справедливо неравенство *S*(*x*)≤*S*(*y*) для всех функций *y*, удовлетворяющих условиям (16.5). В частности, в качестве *у* можно выбрать функцию *x+σh*, где *σ* – любое число, а *h* – произвольная функция, обращающаяся в нуль на границах заданного отрезка[[8]](#endnote-8). Таким образом, справедливо неравенство *S*(*x*)≤*S*(*x+σh*).

Зафиксировав функцию *h* с указанными выше свойствами, определим функцию[[9]](#endnote-9) *f=f*(*σ*) по формуле *f*(*σ*)=*S*(*x+σh*)*.* В результате предшествующее неравенство принимает вид *f*(0)≤*f*(*σ*). Учитывая произвольность числа *σ*, заключаем, что функция *f* имеет минимум в точке нуль. Следовательно, справедливо условие стационарности *f'*(0)=0.

Найдем значение производной



Пользуясь ***формулой Тейлора***, находим значение



где  при *σ*→0, а через *Lx* и  обозначены частные производные от функции *L* по второму и третьему аргументам. Отсюда следует равенство



После деления на *σ* и перехода к пределу при *σ*→0 получаем[[10]](#endnote-10)

 (16.6)

Применяя интегрирование по частям с учетом равенства нулю функции *h* на границах данного интервала, будем иметь



В результате условие стационарности принимает вид

 (16.7)

Согласно ***основной лемме вариационного исчисления***[[11]](#endnote-11), если для некоторой непрерывной функции *g=g*(*t*) справедливо равенство



для любой достаточно гладкой функции *h*, равной нулю на границах интервала интегрирования, то *g*(*t*)=0 всюду на рассматриваемом интервале. Применяя основную лемму вариационного исчисления к равенству (16.7), заключаем, что решение задачи Лагранжа удовлетворяет соотношению

 (16.8)

называемому ***уравнением Эйлера*** или ***Эйлера–Лагранжа***[[12]](#endnote-12). Дифференциальное уравнение (16.8) имеет второй порядок и рассматривается с граничными условиями (16.5). Итак, решение задачи Лагранжа удовлетворяет уравнению Эйлера с соответствующими граничными условиями[[13]](#endnote-13).

***Задача Лагранжа состоит в минимизации некоторого интегрального функционала.***

***Задача Лагранжа сводится к дифференциальному уравнению Эйлера.***

#### **3. Кривая наименьшей длины**

В качестве приложения рассмотрим геометрическую задачу отыскания ***кривой наименьшей длины***, проходящей через две заданные точки. Пусть заданы точки на плоскости с координатами (*t*1,*x*1) и (*t*2,*x*2). Требуется найти кривую *x=x*(*t*) такую, что длина дуги, соединяющей эти точки, была минимальной. Тем самым кривая *x* удовлетворяет равенствам (16.5). В Разделе 1 было установлено, что длина *ds* сколь угодно малого участка дуги кривой характеризуется равенством (16.3). Применительно к данным обозначениям это равенство принимает вид  В результате его интегрирования получаем следующую формулу для вычисления длины кривой *x* на интервале [*t*1,*t*2]



Тем самым, нахождение кривой минимальной длины сводится к минимизации функционала *S* на множестве функций *x=x*(*t*), удовлетворяющих граничным условиям (16.5).

Итак, искомая кривая минимальной длины находится из решения задачи Лагранжа с функцией  Соответствующее уравнение Эйлера имеет вид



Отсюда следует



где *c* – произвольная постоянная. Полученное равенство представляет собой алгебраическое уравнение относительно производной . Тогда эта производная будет равна некоторой константе *c*1. В результате заключаем, что искомая функция определяется по формуле   
*x*(*t*) = *c*1*t + c*2, где *c*2 – некоторая константа. Конкретные значения констант определяются из граничных условий. Итак, кривой наименьшей длины, соединяющей две заданные точки, является прямая.

**Задание 16.1. *Задача о брахистохроне***. Получить уравнение Эйлера для задачи о брахистохроне.

***Отыскание кривой наименьшей длины   
сводится к некоторой задаче Лагранжа.  
Кривой наименьшей длины является прямая.***

#### **4. Задача о падении тела и понятие действия**

Вернемся к исследованию рассмотренного в Главе 1 процесса падения тела под действием собственного веса. Как уже отмечалось, данный процесс описывается уравнением движения

 (16.9)

где *x=x*(*t*) – меняющаяся со временем высота тела над землей, *g* – ускорение свободного падения. Отметим, что оно является следствием второго закона Ньютона[[14]](#endnote-14)



где *P –* вес тела. Перепишем это равенство в виде



Попытаемся интерпретировать его как уравнение Эйлера



соответствующее некоторой функции *L*. Сравнивая последние два равенства, естественно предположить, что справедливы следующие условия

 (16.10)

Полученные соотношения можно понимать как дифференциальные уравнения относительно функции *L*. Интегрируя первое равенство по *x*, заключаем, что

 (16.11)

где *c*1 – произвольная величина, не зависящая от *x*, но которая может зависеть от двух других аргументов искомой функции[[15]](#endnote-15). Аналогично, интегрируя второе равенство (16.10) по  установим

 (16.12)

где *c*2 – произвольная величина, не зависящая от  но которая может зависеть от двух других аргументов искомой функции[[16]](#endnote-16).

Из равенства (16.11) следует, что зависимость функции *L* от *x* определяется исключительно первым слагаемым в его правой части. Из условия (16.12) вытекает, что зависимость этой функции от  определяется исключительно первым слагаемым в его правой части. Таким образом, для задачи Лагранжа с функцией *L*, определяемой равенством



с произвольной функцией *f*, уравнением Эйлера оказывается уравнение падения тела (16.9). Таким образом, это уравнение может быть получено как результат минимизации функционала



Отметим, что третье слагаемое под интегралом не зависит от *x*. Следовательно, интеграл от него является константой, не влияющей на решение задачи минимизации. Таким образом, уравнение падения тела можно интерпретировать как уравнения Эйлера для задачи минимизации функционала



Первое слагаемое под интегралом представляет собой кинетическую энергию *K*(*t*) падающего тела, а второе – потенциальную энергию *U*(*t*) этого тела, взятое с противоположным знаком. Таким образом, справедливы равенства



В механике разность *L=K–U* между кинетической и потенциальной энергиями называется ***лагранжианом*** системы[[17]](#endnote-17), а соответствующий интеграл от лагранжиана – ***действием*** системы, обозначаемое в механике через *S*. Таким образом, уравнение движения (16.8) может быть получено как следствие задачи минимизации действия, т.е. среди всех возможных вариантов эволюции эволюция системе реализуется тот, который соответствует минимуму действия. Данное утверждение, называемое ***принципом наименьшего действия***, можно понимать, как математическую модель рассматриваемого процесса падения тела.

***Уравнение падения тела является уравнением Эйлера  
для некоторой задачи Лагранжа.***

#### **5. Принцип наименьшего действия**

Рассмотрим некоторое тело массы *m*, которая движется в пространстве под действием силы **F** – векторной величины с компонентами *F*1, *F*2 и *F*3. В общем случае сила и масса меняются со временем. Движение точки в пространстве описывается ее координатами, т.е. составляющими вектор-функции **x** = (*x*1,*x*2,*x*3). Определим математическую модель процесса, из которой можно найти закон движения тела, т.е. функциональную зависимость **x** = **x**(*t*).

Попытаемся вновь определить ***действие*** системы на интервале времени [*t*1,*t*2] в соответствии с формулой



где *L* есть ***лагранжиан*** системы, определяемый как разность между кинетической энергией *K* и потенциальной энергией *U*.

Кинетическая энергия в предшествующем случае определялась по формуле  Однако для рассматриваемой система координата, а значит, и ее скорость, т.е. производная от координаты, является векторной величиной. Векторным аналогом квадрата скалярной величины будет квадрат модуля соответствующего вектора. Таким образом, ***кинетическую энергию*** можно определить по формуле



Потенциальная энергия в задаче падения тела определялась по формуле *U=Px.* В общем случае вместо веса мы имеем произвольную силу. При этом как сила, так и координата являются векторными величинами. Векторным аналогом произведения двух чисел является скалярное произведение рассматриваемых векторов. Таким образом, определим ***потенциальную энергию*** по формуле *U=***F**⋅**x**.

На основе полученных результатов находим ***действие***



***Принцип наименьшего действия***, называемый также ***принципом Гамильтона***, говорит о том, закон эволюции системы, т.е. вектор-функция **x** = **x**(*t*) является решением задачи минимизации функционала *S*, т.е. соответствует минимальному действию системы[[18]](#endnote-18).

Попытаться установить с помощью описанной ранее методики, каким соотношениям удовлетворяет решение поставленной задачи минимизации. В данном случае подынтегральное выражение минимизируемого функционала, т.е. лагранжиан, имеет вид



Отметим, что непосредственное использование здесь уравнения Эйлера (16.8) не представляется возможным, поскольку рассматриваемая в Разделе 2 задача Лагранжа содержала единственную неизвестную функцию *x*. Можно, однако, показать, что соотношение (16.8) справедливо и в данном случае, если придать ему векторную интерпретацию

 (16.13)

Здесь лагранжиан зависит от векторных величин **x** и . В этой связи входящие в последнее равенство частные производные от *L* также оказываются векторными. Вычисляя частные производные от лагранжиана, приходим к системе дифференциальных уравнений



В результате мы получаем векторную форму ***второго закона Ньютона***, как следствие принципа наименьшего действия.

**Задание 16.2**. ***Уравнения Эйлера в векторном случае***. Рассматривается, задача минимизации функционала



на множестве вектор-функций *n*-ого порядка, принимающих заданные значения на концах рассматриваемого интервала, где *L* – известная функция своих аргументов общего вида. Следуя описанной в Разделе 2 методике, установить систему уравнений Эйлера (16.13). Для этого вновь определяется функция *f=f*(*σ*) и приравнивается нулю его производная в нуле. В результате получается векторной аналог равенства (16.7), откуда путем надлежащего выбора векторной функции **h**, получается желаемый результат.

***Движение тела переменной массы в пространстве   
под действием произвольной силы  
можно описать с помощью принципа наименьшего действия.***

***Как следствие получается векторная форма  
второго закона Ньютона.***

#### **6. Колебание струны**

Установим принцип наименьшего действия применительно к процессу колебания струны, рассмотренному в Главе 12. Он описывается функцией *u=u*(*x*,*t*), выражающей отклонение струны от положения равновесия в точке *х* в момент времени *t*.

Кинетическая энергия струны зависит от скорости ее движения и равна

****

где *m* – масса струны, а *ut* есть производная функции *u* по переменной *t*, т.е. скорость. Как отмечалось ранее, масса однородной струны длиной Δ*x* определяется по формуле *m* = *ρ*Δ*x*, где *ρ* – ее линейная плотность. Тем самым кинетическая энергия выбранного участка струны будет **** Полученная формула предполагает неизменность характеристик струны по ее длине. В нашем случае эта формула будет верна, если ее отнести к сколь угодно малому участку длины *dx*. В результате приводим к соотношению**** Тогда кинетическая энергия струны длиной *X* равна интегралу

****

Потенциальная энергия участка гибкой струны пропорциональна его удлинению. Согласно установленной ранее формуле (16.3) участок длиной *dx* струны, имеющей в деформированном состоянии профиль *u=u*(*x*,*t*), растягивается до величины  где *ux* есть производная функции *u* по переменной *x*. Как и в Главе 12, мы ограничимся рассмотрением малых колебаний струны, когда производная *ux* достаточно мала. Тогда, пользуясь формулой Тейлора, имеем



т.е. мы пренебрегаем членами более высокими степенями относительно *ux*. Таким образом, удлинение струны будет равно  В результате находим потенциальную энергию участка струны где коэффициент *k* – натяжение струны. Теперь определяем потенциальную энергию струны длиной *X*



Следуя описанной ранее методике, находим лагранжиан системы



В результате определяем, что действие системы на интервале времени от 0 до *Т* равно



Согласно принципу наименьшего действия струна движется таким образом, чтобы действие системы в процессе движения было минимальным. Таким образом, математической моделью движения струны оказывается задача минимизации функционала *S*.

Определим аналог уравнения Эйлера для данной задачи. Введем вновь функцию *f*(*σ*)=*S*(*u+σh*), *u* – решение задачи, *h* – произвольная функция, а *σ* – некоторое число. Тогда функция *σ* достигает своего минимума в нуле, а значит, ее производная равна нулю в этой точке. Очевидно,



В результате находим



Это равенство справедливо для всех функций *h*. Выбираем в качестве *h* произвольную функцию, обращающуюся в нуль на границах рассматриваемых пространственного и временного интервала. Тогда после интегрирования по частям в последнем равенстве будем иметь



Применяя основную лемму вариационного исчисления[[19]](#endnote-19) с учетом произвольности функции *h*, приходим к соотношению



Определив  получаем равенство



т.е. установленное в Главе 12 ***уравнение колебания струны***. Итак, принцип наименьшего действия позволяет определить уравнение, описывающее закон движения струны.

***Колебания струны можно описать   
с помощью принципа наименьшего действия.***

***Как следствие получается уравнение колебания струны.***

**Направление дальнейшей работы**. Во всех рассмотренных ранее математических моделях состояние системы характеризовалось некоторыми функциями, аргументы которых менялись непрерывным образом. Однако на практике часто встречаются дискретные системы, которые характеризуются не функциями, а векторами. Таким модели будут рассмотрены в последующей главе.

### **ПРИЛОЖЕНИЯ**

В Разделе 2 при исследовании задачи Лагранжа было получено уравнение Эйлера. В частном случае для него можно определить его первый интеграл. Применительно к рассмотренному в Разделе 5 движению тела в пространстве это позволяет установить закон сохранения энергии. Аналогичная идея применяется при выводе законов преломления света на основе принципа Ферма.

Принципы вариационного исчисления применимы и в том случае, когда значения искомой функции на границах заданной области заранее не фиксированы, а также при наличии некоторых дополнительных ограничениях. В частности, исследуются задача о наискорейшей переправе лодки с одного берега реки на другой, а также процесс колебания маятника.

Заключительный раздел посвящен приближенным методам решения задач на экстремум[[20]](#endnote-20). Попутно вводится понятие производной функционала, с помощью которого можно унифицировать многие результаты вариационного исчисления.

#### **1. Закон сохранения энергии**

Отметим один важный специальный случай рассмотренной в Разделе 2 задачи Лагранжа. Предположим, что находящаяся под интегралом функция *L* не зависит от переменной *t*, т.е. Найдем значение производной



Если теперь функция *x* удовлетворяет уравнению Эйлера



то из предшествующего равенства следует



Таким образом, в рассматриваемом случае от дифференциального уравнения Эйлера второго порядка можно перейти к уравнению первого порядка

 (16.14)

где *c* – произвольная постоянная.

В теории дифференциальных уравнений некоторая функция, не меняющаяся на любом решении рассматриваемого уравнения или системы уравнений, называется ***первым интегралом системы***. Таким образом, первым интегралом для уравнения Эйлера будет выражение, находящееся в левой части равенства (16.14).

В частности, в задаче о падении тела функция *L* определяется по формуле



и не зависит от времени. Определяем выражение



Таким образом, первым интегралом для уравнения падения тела является сумма кинетической и потенциальной энергии, а соотношение (16.14) выражает ***закон сохранения энергии***.

Пусть теперь рассматривается задача Лагранжа, в которой состояние *x* является векторным, а подынтегральная функция *L* вновь не зависит явным образом от переменной *t*. Тогда равенство (16.14) также остается в силе, если первое слагаемой в его левой части интерпретировать как скалярное произведение соответствующих величин[[21]](#endnote-21). В качестве примера рассмотрим описанную в Разделе 5 задачу о движении материальной точки в пространстве под действием произвольной силы.

Функция *L* здесь имеет вид



Для применимости описанной техники предположим, что масса тела и действующая на нее сила не меняются со временем. Тогда находим первый интеграл системы



В результате получаем равенство



Первое слагаемое в левой части представляет собой кинетическую энергию системы, а второе – потенциальную энергию, определяемую данной силой. Таким образом, первым интеграл системы вновь оказывается ***интеграл энергии***, а последнее соотношение выражает ***закон сохранения энергии***[[22]](#endnote-22).

#### **2. Принцип Ферма и преломление света**

Рассмотрим процесс распространения света в неоднородной среде, относящийся к геометрической оптике[[23]](#endnote-23). Основным физическим законом здесь является ***принцип Ферма***, согласно которому свет распространяется от одной точки к другой по такому пути, который соответствует минимальному времени на его преодоление. Отсюда, в частности, следует, что в однородной среде свет распространяется прямолинейно, поскольку скорость света в однородной среде постоянна.

Установим математическую модель рассматриваемого процесса. Пусть свет распространяется на плоскости по некоторой кривой *y = y*(*x*), причем начальная и конечная точки известны. Скорость движения света определяется по формуле  где функция *s=s*(*t*) характеризует пройденный путь. Как уже отмечалось ранее, длина элемента дуги данной кривой, соответствующей участку *dx*, равна  Тогда из предшествующего равенства следует



Предположим, что начальному моменту времени *t=*0 соответствует точка с координатами (*x*1,*y*1), а конечному моменту времени *t=T* – точка (*x*2,*y*2). Тогда в результате интегрирования находим время движения света по кривой *y=y*(*x*) от указанной начальной точки к конечной

 (16.15)

Согласно принципу Ферма, свет движется от одной точке к другой таким образом, чтобы функционал (16.15), выражающий время движения, был наименьшим. Таким образом, математической моделью рассматриваемого процесса является задача Лагранжа, состоящая в минимизации данного функционала с известными граничными условиями.

Установим с помощью принципа Ферма закон ***преломления света***. Предположим, что точка *y*=0 соответствует границе двух сред, см. Рис. 16.3. В каждой из них скорость света постоянна. Таким образом, имеем следующее представление входящей в формулу (16.15) скорости света:





Рис. 16.3. Преломление света.

Отметим, что подынтегральное выражение для рассматриваемой вариационной задачи



не зависит явным образом от переменной *х*. Тогда уравнение Эйлера может быть сведено к уравнению первого порядка (16.14)  В данном случае оно принимает вид



Отсюда следует равенство

 (16.16)

где *c*1 = -1/*c*. Решая дифференциальное уравнение (16.16) с соответствующими граничными условиями, можно найти искомый закон движения *y = y*(*x*).

Отметим, что производная искомой функции равна тангенсу угла наклона траектории, т.е. *y*' = tg*ϕ*. Учитывая известную формулу



приводим равенство (16.16) к виду  Отсюда следует соотношение



связывающее углы падения и преломления со скоростями света в рассматриваемых средах. Это и есть закон преломления света, называемый ***законом Снеллиуса***.

#### **3. Задача о переправе**

Рассматривается задача о переправе с одного берега реки на другой на лодке за минимальное время. Предполагается, река имеет ширину *X* и обладает прямыми берегами. Выбираем систему координат так, чтобы координата *х* была направлена поперек реки, а координата *у –* вдоль реки по одному из ее берегов (см. Рис. 16.4). Скорость реки  считается известной. Скорость лодки *и* превосходит максимальную скорость реки и считается постоянной. Требуется выбрать такой курс лодки, т.е. функцию *y = y*(*x*),чтобы, двигаясь по нему, она переплыла с одного берега на другой за минимальное время.



Рис. 16.4. Движение лодки.

Выбирая точку старта лодки за начало координат, приходим к граничному условию

*y*(0) = 0. (16.17)

Скорость движения лодки в поперечном и продольном направлении характеризуется дифференциальными уравнениями

 (16.18)

где угол *α* – угол, определяемый курсом лодки. Из этих соотношений следует равенство



Рассмотрим последнее соотношение как уравнение относительно угла *α*. Получаем



откуда после возведения в квадрат следует



Обозначив *z=*(*u*cos*α*)-1, приходим к следующему квадратному уравнению относительно *z*



Отсюда находим



Отметим, что знак «минус» здесь приведет к отрицательному значению угла *α* и не дает направление в сторону другого берега реки. Таким образом, находим



Пользуясь первым из равенств (16.18), определяем



За время от нуля до *T*, выбрав некоторый маршрут движения, лодка проходит путь по координате *х* от нуля до значения *X*. Тогда, интегрируя предшествующее соотношение, находим время движения лодки



Таким образом, для нахождения функции *y* требуется минимизировать функционала *T* на множестве всех функций, удовлетворяющих граничному условию (16.17).

Отметим, что в данном случае математическая модель системы не соответствует задачи Лагранжа, поскольку имеется лишь одно граничное условие. Однако для исследования задачи можно, тем не менее, воспользоваться методикой, описанной в Разделе 2.

Пусть требуется минимизировать функционал



на множестве функций *y=y*(*x*), удовлетворяющих граничному условию *y*(0)=*y*1. Предположим, что некоторая функция *y* является решением этой задачи. Тогда справедливо неравенство *T*(*y*)≤*T*(*y+σh*) для любого числа *σ* и любой функции *h=h*(*x*), обращающаяся в нуль при *x=*0. Определяем функцию *f*(*σ*)=*T*(*y+σh*). Очевидно, она имеет минимум в нуле, откуда следует равенство *f'*(0)=0. Повторяя преобразования из Раздела 2, находим



После интегрирования по частям с учетом граничного условия для функции *h* получаем



Таким образом, справедливо равенство

 (16.19)

отличающееся (с точностью до обозначений) от равенства (16.7) лишь наличием второго слагаемого в левой части.

Функция *h* здесь произвольна. Выбирая ее равной нулю при *x=X*, получаем



Отсюда в силу основной леммы вариационного исчисления следует уравнение Эйлера (16.8). Однако равенство (16.20) остается в силе и для функций *h*, отличных от нуля на правом конце данного интервала. В то же время первое слагаемое обращается в нуль в силу уравнения Эйлера. В результате получаем равенство



откуда в силу произвольности *h* следует формула



называемая ***условием трансверсальности***. Таким образом, решение задачи удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера второго порядка с заданным граничным условием на левом конце данного интервала и условием трансверсальности на его правом конце.

Применительно к задаче о переправе функция *L* имеет вид



Учитывая, что эта функция не зависит явным образом от *y*, получаем уравнение Эйлера



Отсюда следует

,

где *c*1 – произвольная постоянная. Из условия трансверсальности получаем

,

а значит, константа  в предшествующем равенстве обращается в нуль. Таким образом, получаем дифференциальное уравнение первого порядка



После возведения в квадрат находим значение *y*' = *v*/*u*. Интегрируя это уравнение с учетом граничного условия (16.17), получаем



Это равенство и дает искомую траекторию движения лодки.

**Задание 16.3**. ***Задача Больца***. Рассматривается задача минимизации приведенного выше функционала общего вида без каких-либо граничных условий, называемая задачей Больца. Показать, что ее решение удовлетворяет уравнению Эйлера и двум условиям трансверсальности.

#### **4. Колебания маятника**

В Главе 3 мы рассматривали процесс колебания маятника. Попробуем исследовать его на основе принципа наименьшего действия. Итак, мы рассматриваем движение маятника в вертикальной плоскости, характеризуемое горизонтальной и вертикальной координатами *х* и *у*, меняющимися со временем. При этом в качестве начала координат выбирается точка подвеса маятника. Кинетическая энергия маятника определяется вектором скорости 



где *m* – масса маятника. Потенциальная энергия маятника определяется его весом и равна  где *g* – ускорение свободного падения, а знак минус обусловлен направлением вертикальной координаты и веса. Таким образом, лагранжиан системы имеет вид



Действие системы на некотором интервале [*t*1,*t*2] равно



В данной задаче координаты маятника не являются независимыми друг от друга. Маятник неизменно находится на некотором расстоянии *l* от точки подвеса, вследствие чего его координаты в любой момент времени связаны равенством

 (16.21)

Согласно принципу наименьшего действия маятник движется от одной заданной точки в момент времени  до другой заданной точки в момент времени  таким образом, чтобы действие системы минимизировалось и выполнялось условие (16.21). Итак, математической моделью рассматриваемого процесса оказывается задача на условный экстремум.

Установим связь между этой моделью и той, что была получена в Главе 3. Непосредственное использование описанной ранее методики не представляется возможным из-за имеющегося ограничения (16.21). Однако мы вновь определяем функцию *f*(*σ*)=*S*(**u***+σ***h**), где под парой **u**=(*x*,*y*) понимается решение рассматриваемой задачи, *σ* есть произвольное число, а компоненты вектора **h**=(*h*1,*h*2) обращаются в нуль на границах данного интервала и являются такими, чтобы соответствующая величина **u***+σ***h** удовлетворяла условию (16.21)[[24]](#endnote-24). В этих условиях функция *f* вновь будет иметь минимум в нуле. Тогда можно приравнять нулю ее производную в нуле. В результате получаем равенство



После интегрирования по частям с учетом равенства нулю вектора **h** на границе, имеем

 (16.22)

В полученном соотношении компоненты вектора **h** не являются произвольными, поскольку для справедливости равенства (16.21) они должны удовлетворять условию

(*x+σh*1)2 + (*y+σh*2)2 = *l*2.

Вычитая отсюда равенство (16.21), после деления *σ* и переходя к пределу при *σ* стремящимся к нулю, будем иметь

*xh*1 + *yh*2= 0. (16.23)

Итак, компоненты вектора **h** оказываются связанными равенством (16.23). Будем полагать, что функция *h*2 здесь произвольна, а *h*1 определяется этого условия. Умножая последнее равенство на некоторую функцию *λ=λ*(*t*), интегрируя его по *t* и складывая результат с равенством (16.22), получаем

 (16.24)

Подбираем функцию *λ* таким образом, чтобы первый интеграл в равенстве (16.24) обратился в нуль, т.е. выполнялось соотношение

 (16.25)

В результате равенство (16.24) принимает вид



Здесь функция *h*2 произвольна. Тогда, пользуясь основной леммой вариационного исчисления, получаем

 (16.26)

Итак, три неизвестных функции *x*, *y* и *λ* связаны дифференциальными уравнениями (16.25), (16.26) с соответствующими граничными условиями и алгебраическим уравнением (16.21)[[25]](#endnote-25). Гарантируем справедливость условия (16.21) за счет перехода в полярную систему координат с помощью равенств *x=l*sin*θ*, *y=l*cos*θ*. Тогда (16.25) и (16.26) принимают вид



Умножая первое из этих равенств на cos*θ*, а второе – на sin*θ* и вычитая из первого второе, будем иметь



где  Полученное соотношение представляет собой рассмотренное в Главе 3 ***уравнение колебания маятника***. В случае малых колебаний можно считать, что синус угла достаточно близок к значению самого угла, и уравнение колебания маятника принимает привычный вид



Итак, описанные математические модели могут быть получены как следствия рассматриваемого вариационного принципа.

#### **5. Приближенное решение задач минимизации**

Как уже отмечалось, необходимым условием экстремума функции *f=f*(*x*)в некоторой точке *x* является равенство нулю производной этой функции в данной точке *f'*(*x*)=0. Последнее представляет собой алгебраическое уравнение относительно искомой точке. Если функция *f* достаточно простая, то искомое решение может быть найдено явным образом[[26]](#endnote-26). Однако для достаточно сложных функций решение может быть определено лишь приближенно, например, с помощью следующего алгоритма

*xk+*1 = *xk* – *αk f'*(*xk*), *k =* 0,1, …, (16.27)

называемого ***градиентным методом***, где *k –* номер итерации, а *αk –* положительный параметр[[27]](#endnote-27).

Практическая реализация алгоритма (16.27) не вызывает особого труда. Однако выше мы рассматривали математические модели, связанные с минимизацией функционалов. Для распространения рассматриваемого алгоритма на задачи общего вида достаточно определить понятие производной функционала. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда функционал определен на некотором множестве (пространстве) *V* со скалярным произведением[[28]](#endnote-28). В частности, если мы имеем дело с функцией одной переменной, то скалярное произведение представляет собой обычное произведение. Если рассматривается функция многих переменных, то ее аргументом является вектор, а скалярное произведение характеризуется обычным равенством



Если рассматривается функционал, зависящий от функций, определенных на некотором интервале [*t*1, *t*2], то скалярное произведение можно определить следующим образом



***Производной Гато*** функционала *S* в точке *x* называется такой элемент *S'*(*x*) пространства *V*, который для любых значений *h* удовлетворяет равенству



Другими словами, производной функционала является то, что в результате указанного предельного перехода оказывается скалярно умноженным на произвольное *h*. Легко убедиться, что для функции одной переменной производная Гато совпадает с обычной производной, для функции многих переменных *f=f*(**x**) производной Гато является градиент ∇*f*(**x**), а для рассмотренного ранее функционала из задачи Лагранжа производная равна

 (16.28)

Естественным применением производной Гато в теории экстремума является возможность распространения известных результатов минимизации функций одной переменной на экстремальные задачи общего вида. В частности, легко показать, что необходимым условием минимума функционала *S* в некоторой точке *x* (в зависимости от ситуации под точкой понимается число, вектор, функция) является ***условие стационарности***[[29]](#endnote-29) *S'*(*x*)=0. Для функции одной переменной последнее соотношение сводится к обычному условию стационарности, являющемуся алгебраическим уравнением. Для функции многих переменных *f=f*(**x**) получаем равенство ∇*f*(**x**)=0, представляющее собой систему алгебраических уравнений. В случае функционала из задачи Лагранжа для получения условия стационарности достаточно приравнять нулю выражение в правой части равенства (16.28), в результате чего получается ***уравнение Эйлера*** (16.8), которое является обыкновенным дифференциальным уравнением. Таким образом, с помощью дифференцирования функционалов можно с единых позиций описать значительное количество результатов теории экстремума, а также установить глубокую связь между ней и теорией уравнений[[30]](#endnote-30).

Для приближенного решения задачи минимизации функционала можно воспользоваться ***градиентным методом***, являющимся естественным обобщением алгоритма (16.27)

*xk+*1 = *xk* – *αk S'*(*xk*), *k =* 0,1, … .

В частности, для задачи минимизации функции многих переменных получаем равенство[[31]](#endnote-31)

**x***k+*1 = **x***k* – *αk*∇*f*(**x***k*), *k =* 0,1, ….

**Задание 16.4. *Интеграл Дирихле***. Рассматривается интеграл Дирихле



где *n* – размерность области Ω, *f* – известная функция. Определить производную данного функционала и записать соответствующее условие стационарности. В процессе нахождения производной используется формула Грина, являющаяся многомерным аналогом формулы интегрирования по частям.

### **КОММЕНТАРИИ**

1. О вариационном исчислении см. Bliss, Elsgolc, GelFom, Jost, Riley, Sagan, Young. [↑](#endnote-ref-1)
2. О ***принципе наименьшего действия*** см. Lanczos, Landau1. [↑](#endnote-ref-2)
3. Брахистохроной называется искомая кривая. Отметим, что если точки *A* и *B* лежат на одной вертикальной прямой, то, очевидно, тело просто будет падать вниз. Фактически мы получим рассмотренную в Главе 1 задачу о падении тела под действием собственного веса. С задачей о брахистохроне связано становление вариационного исчисления, как самостоятельного раздела математики. [↑](#endnote-ref-3)
4. Отметим, что мы пользуемся той же процедурой, что и при выводе уравнений математической физики в Части II. Действительно, сначала мы выделяем некоторый интервал длиной Δ*x* и устанавливаем там некое соотношение. Потом отмечаем, что, поскольку рассматриваемые характеристики в действительности являются переменными, полученное соотношение будет справедливо лишь на участке сколь угодно малой длины *dx*. Затем, в результате интегрирования этого равенство устанавливаем соотношение, справедливой на интересующим нас протяженном интервале. [↑](#endnote-ref-4)
5. С задачами поиска экстремума функций и функционалов мы еще столкнемся в Главе 17 и Главе 21. [↑](#endnote-ref-5)
6. Действительно, если *x* является точкой минимума функции *f*, то *f*(*x*)≤*f*(*y*) для всех *у*. Выбирая *y=x+h*, установим неравенство *f*(*x+h*)–*f*(*x*)≥0 для всех *h*. Если число *h* положительно, то после деления последнего неравенства на *h* и перехода к пределу при *h* стремящимся к нулю, получаем *f'*(*x*)≥0. Если же число *h* отрицательно, то после деления того же неравенства на *h* и перехода к пределу установим противоположное неравенство *f'*(*x*)≤0. В силу произвольности *h*, заключаем, что выполняются оба полученных неравенства. Это возможно исключительно в случае равенства *f'*(*x*)=0, что и является условием стационарности. Естественно, при его получении предполагается, что данная функция дифференцируема в рассматриваемой точке. [↑](#endnote-ref-6)
7. Полученное уравнение не эквивалентно исходной задаче на экстремум, будучи, вообще говоря, ***необходимым***, но не достаточным ***условием минимума***. В частности, условию стационарности удовлетворяют не только точки минимума, но и точки максимума функции (например, для функции *f*(*x*)=–*x*2), не только точки ***абсолютного***, но и ***локального минимума*** (точки минимума не во всей области определения функции, а лишь в окрестности данной точки, см., например, для функции *f*(*x*)=3*x*4–8*x*3–6*x*2+24*x*), и даже точки перегиба (например, для функции *f*(*x*)=*x*3). [↑](#endnote-ref-7)
8. Определенная таким образом величина *y* называется ***вариацией*** функции *x*. [↑](#endnote-ref-8)
9. Действительно, для пока неизвестного, но потенциально существующего решения *x* и фиксированной функции *h* можно вычислить значение соответствующего интеграла, которое будет зависеть от числа *σ*. [↑](#endnote-ref-9)
10. В вариационном исчислении полученный предел называют ***вариацией*** данного ***функционала***, а в функциональном анализе – ***производной*** функционала *I* в точке *x* ***по направлению*** *h*. [↑](#endnote-ref-10)
11. Об основной лемме вариационного исчисления GelFom, Jost. [↑](#endnote-ref-11)
12. Ранее было установлено, что задача минимизации функции сводится к условию стационарности, которое является алгебраическим уравнением. Теперь задача минимизации интегрального функционала была преобразована к обыкновенному дифференциальному уравнению Эйлера. В процессе решения задачи минимизации интегрального функционала, зависящего от функции многих переменных получается уравнение в частных производных, см. Приложение. Тем самым мы убеждаемся в наличии глубокой связи между теориями уравнений и задач на экстремум. [↑](#endnote-ref-12)
13. Естественно, уравнение Эйлера, подобно условию стационарности, является лишь необходимым условиям минимума. В вариационном исчислении известны и другие условия экстремума, в том числе, достаточные, Elsgolc, GelFom, Jost, Sagan. [↑](#endnote-ref-13)
14. Знак минус объясняется тем, что направление координаты *x* и действие силы тяготения противоположны. [↑](#endnote-ref-14)
15. Действительно, дифференцируя равенство (16.11) по *x*, получаем первое соотношение (16.10). [↑](#endnote-ref-15)
16. Действительно, дифференцируя равенство (16.11) по  получаем второе соотношение (16.10). [↑](#endnote-ref-16)
17. Лагранжиан как разность между кинетической и потенциальной энергией может показаться весьма странной характеристикой. Действительно, какой смысл вычитать различные типы энергии? Однако представим себе движение тела, поднятого на некоторую высоту, а потом отпущенного. Изначально тело покоится, а значит, имеет нулевую кинетическую энергию. В то же время, будучи поднятым на определенную высоту, тело обладает определенной потенциальной энергией. Падая, тело приобретает некоторую скорость, которая неизменно возрастает. В то же время в процессе падения убывает высота тела над поверхности земли, а значит, убывает и его потенциальная энергия. Таким образом, уменьшение потенциальной энергии сопровождается увеличением кинетической энергии. Аналогичная ситуация наблюдалась и в процессе движения маятника, см. Глава 3. Если маятник отклонить от равновесия и отпустить, то начальной момент движения он обладает некоторой потенциальной энергией, а кинетическая энергия равна нулю. По мере приближения маятника к равновесию его потенциальная энергия падает, а кинетическая растет. В момент достижения положения равновесия потенциальная энергия маятника равна нуля, а кинетическая максимальна. Продолжая движение по инерции, маятник отклоняется от равновесия, приобретая некоторую потенциальную энергия. В свою очередь, его кинетическая энергия уменьшается. Максимум потенциальной энергии достигается в момент достижения минимума кинетической энергии, т.е. когда маятник прекращает отклоняться от равновесия. Тем самым поведение кинетической и потенциальной энергий оказывается противоположным, а значит, кинетическая энергия и потенциальная энергия, взятая с противоположным знаком, ведут себя одинаково. Следовательно, лагранжиан системы, т.е. разность между кинетической и потенциальной энергиями, а также его интеграл, т.е. действие системы, действительно имеют некоторый физический смысл. Действие системы принимается за меру движения рассматриваемого тела, а принцип наименьшего действия является фундаментальным законом природы и математической моделью широкого класса физических явлений. [↑](#endnote-ref-17)
18. Наряду с принципом наименьшего действия в механике используются также принцип возможных перемещений, принцип наименьшего принуждения, принцип наименьшей кривизны и др. Вариационные принципы механики устанавливают свойства, позволяющие отличить истинное движение объекта от других возможных его состояний. Помимо классической механики вариационные принцип используются также в электродинамике, оптике, квантовой механике, теории относительности и др. С вариационными принципами механики можно познакомиться, например, в монографиях Buchholz, Gershenfeld, Landau1, Lanczos. [↑](#endnote-ref-18)
19. Естественно, мы пользуемся здесь двумерной формой основной леммы вариационного исчисления. [↑](#endnote-ref-19)
20. О приближенном решении задач нахождения экстремума см. Методы приближенного решения экстремальных задач приводятся, например, в книгах Fletc, Gill, Snyman. [↑](#endnote-ref-20)
21. Для обоснования этого свойства достаточно выполнить те же действия, что и в скалярном случае. [↑](#endnote-ref-21)
22. В физике рассматриваются также законы сохранения импульса, момента импульса, массы, заряда и др. В соответствии с ***теоремой Нётер*** они связаны с различными симметриями физических систем, см. GelFom, Neuenschwander. [↑](#endnote-ref-22)
23. О ***геометрической оптике*** см. Greivenkamp. [↑](#endnote-ref-23)
24. На данном этапе не важно, каким образом можно обеспечить выполнение указанного условия. [↑](#endnote-ref-24)
25. Использованный метод решения задач на условный экстремум называется методом множителей Лагранжа, Bliss, Elsgolc, GelFom, Jost, Sagan, Young. [↑](#endnote-ref-25)
26. Естественно, найденное значение может и не быть решением поставленной задачи минимизации функции. [↑](#endnote-ref-26)
27. Действительно, последовательность параметров {*αk*} выбирается сходящейся с некотором пределом *α*. Предположим, что последовательность {*xk*} имеет некоторый предел *x*. Тогда, переходя к пределу в равенстве (16.27), получаем *x* = *x*–*αf'*(*x*), откуда следует, что *x* есть решение условия стационарности. [↑](#endnote-ref-27)
28. Множества со скалярным произведением называют ***унитарными пространствами***. При некотором дополнительном ограничении они представляет собой ***гильбертовыми пространствами***, являющимися одним из центральных понятий функционального анализа и имеющих многочисленные приложения, см. Hutson, Kolmogorov, Reed. Приведенное определение производной функционала можно распространить и на более широкий класс топологических векторных пространств. Аналогичным образом определяются производные операторов общего вида, т.е. преобразований, связывающих два множества произвольной природы, Hutson, Kolmogorov. Применению различных форм операторных производных в теории экстремума посвящена книга SerovCRC. [↑](#endnote-ref-28)
29. Нетрудно убедиться, что если функционал является ***выпуклым***, т.е. справедливо неравенство   
    *S*(*σx+*(1-*σ*)*y*)≤*σS*(*x*)+(1-*σ*)*S*(*y*) для любых аргументов *x* и *y* и любого числа *σ* из отрезка [0,1], то условие стационарности является необходимым и достаточным условием минимума, т.е. любое его решение минимизирует функционал. [↑](#endnote-ref-29)
30. Естественным обобщением условия стационарности на случай задач минимизации функционала на выпуклом подмножестве рассматриваемого пространства являются вариационные неравенства, см. Lions. Вариационные неравенства сами по себе могут служит математическими моделями физических процессов, Duvaut, Glow, Kinder. Примером может служить задача о распределении давления жидкости в объеме, ограниченным тонкой полупроницаемой мембраной. [↑](#endnote-ref-30)
31. Этим и объясняется использование термина «градиентный метод». [↑](#endnote-ref-31)